Jenfelder Allee 80 — 22045 Hamburg

Vorkurs
Mathematik & Physik
Aufgabensammlung

für MeisterIn Veranstaltungstechnik & BerufsspezialistIn Theatertechnik

Datum:	Dozent:	Revision:
19.08.2024	Michael Kiel	5.0

Inhaltsverzeichnis

Teil I.
Grundlagen Mathematik

1. Grundrechenarten

1.1. Rechnen mit negativen Zahlen

Bei der **Addition und Subtraktion mit negativen Zahlen** gibt es zwei Dinge zu beachten:

- Ist die erste Zahl bei einer Addition oder Subtraktion negativ, muss man beim Ausführen der Rechnung an den Zahlenstrahl denken (oder im übertragenen Sinn an einen Kontostand): Zieht man von einer negativen Zahl etwas ab, so erhält man eine negative Zahl, die noch größer ist. Addiert man etwas zu einer negativen Zahl, so wird das Ergebnis eine kleinere negative Zahl oder sogar eine positive Zahl sein (das hängt davon ab, ob die addierte Zahl kleiner oder größer als die erste ist).
- Trifft ein Vorzeichen mit einem Rechenzeichen zusammen, dann werden die beiden Zeichen miteinander verrechnet: Aus zwei gleichen Zeichen wird immer ein Plus, aus zwei unterschiedlichen Zeichen immer ein Minus.

Ein paar Beispiele:

- $-12 - 6 = -18$
  Wenn man Schulden hat und noch mehr ausgibt, dann hat man noch mehr Schulden.
- $-12 + 6 = -6$
  Wenn man Schulden hat und etwas zurückzahlt, dann hat man weniger Schulden.
- $-12 + 16 = 4$
  Wenn man Schulden hat und mehr als diese zurückzahlt, dann hat man die Schulden abgezahlt und ein Restguthaben.
- $23 - (-16) = 23 + 16 = 39$
  Treffen zwei gleiche Vorzeichen zusammen, so wird ein Plus daraus.
- $23 + (-16) = 23 - 16 = 7$
  Treffen zwei unterschiedliche Vorzeichen zusammen, so wird ein Minus daraus.

Übungsaufgaben:

1. $-34 + 41 =$
2. $-75 + 58 =$
3. $-62 - 35 =$
4. $45 - 67 =$
5. $52 - 37 =$
6. $81 - (-22) =$
7. $27 + (-32) =$

Bei der **Multiplikation und Division mit negativen Zahlen** gibt es nur eine Regel:

- Die beiden Vorzeichen der Zahlen, die multipliziert / dividiert werden, werden miteinander verrechnet: Bei zwei gleichen Vorzeichen wird das Ergebnis immer positiv, bei zwei unterschiedlichen Vorzeichen wird das Ergebnis immer negativ.

Zwei Beispiele:

- $-15 \cdot (-5) = 75$
  Bei zwei gleichen Vorzeichen wird das Ergebnis immer positiv.
- $-15 \div 5 = -3$
  Bei zwei unterschiedlichen Vorzeichen wird das Ergebnis immer negativ.

Übungsaufgaben:

8. $13 \cdot (-6) =$
9. $\frac{-45}{-9} =$
10. $-21 \cdot (-4) =$
11. $-35 \div 7 =$

1.2. Reihenfolge von Rechenoperationen und Zusammenfassen von Termen

Kommen bei einer Rechnung verschiedene Rechenzeichen vor, gibt es eine **festgelegte Reihenfolge der Rechenoperationen**, nach der du vorgehen musst:

1. Exponenten gehen vor jeder weiteren Rechenoperation (ausführlicher in 1.4 ab Seite 11).
2. Klammern zuerst.
3. Verschachtelte Klammern: von innen nach außen.
4. Gibt es keine Klammern, so gilt Punkt- (Multiplikation / Division) vor Strichrechnung (Addition / Subtraktion).
5. Ansonsten wird von links nach rechts gerechnet.

Ein Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&30 + [4 + (34 - 42) \cdot 2^2] = && \text{Innere Klammer zuerst / Potenzen zuerst}\\
&= 30 + [4 + (-8) \cdot 4] = && \text{Punkt vor Strich}\\
&= 30 + [4 + (-32)] = && \text{Klammer zuerst}\\
&= 30 + [-28] = &&\\
&= 2 &&
\end{aligned}
$$

Übungsaufgaben:
Berechne folgende Terme. Achte dabei auf die richtige Reihenfolge.

12. $-15\,[-5-(2-11)]+63=$

13. $\left[-80+(4+1)^2\cdot 4\right]\div(-5)=$

14. $75+[3+7\,(24-33)]-48\div 4=$

15. $100-5\,[-25+(22-14)\cdot(-16+20)]=$

Kommen bei einer Rechnung auch Terme mit Buchstaben (= Platzhalter für Zahlen) vor, so kann man diese Terme oft nur vereinfachen. Das Ergebnis ist dann keine Zahl sondern ein Term, der neben Zahlen auch Buchstaben enthält. Bei der Vereinfachung dieser Terme muss man die oben aufgeführten Regeln berücksichtigen. Zusätzlich gilt:

- Nur Terme, die die gleichen Buchstaben enthalten, können addiert / subtrahiert werden. Die Buchstaben kann man hierbei wie Einheiten auffassen (Kilogramm und Meter kann man nicht zusammenzählen).
- Wird eine Klammer mit einem Faktor multipliziert / dividiert, so muss man alle Terme in der Klammer mit diesem Faktor multiplizieren / dividieren.
- Werden zwei Klammern multipliziert / dividiert, so muss man jeden Term aus der ersten Klammer mit jedem Term aus der zweiten Klammer multiplizieren.

Ein paar Beispiele:

- $12a-5b+6a+25c+15b=18a+10b+25c$
  Nur Terme, die die gleichen Buchstaben enthalten, können addiert / subtrahiert werden.
- $5a\,(3b-4a)=15ab-20a^2$
  Alle Terme einer Klammer müssen mit einem Faktor multipliziert / dividiert werden.
- $(2a-b)\,(6a+7b)=12a^2+14ab-6ab-7b^2=12a^2+8ab-7b^2$
  Alle Terme der ersten Klammer müssen allen Termen der zweiten multipliziert / dividiert werden. Hinterher kann man Terme mit der gleichen Buchstabenkombination addieren / subtrahieren.

Übungsaufgaben:
Fasse die Terme möglichst kompakt zusammen. Kommen dabei Klammern vor, löse diese bitte auf.

16. $3x + 5y - 2z + 7x - 4y =$

17. $4(-3x + 2y) + 15x - 6y =$

18. $-6(3x - 4y) - 8(-3x + 5y) =$

19. $(5s - t)(-2s + 12) =$

20. $(25d + 7e)(-3e + 4d) =$

21. $(12f + 5g - 7h)(-4 + 5f) =$

1.3. Rechnen mit Brüchen

Ein **Bruch steht für die Division vom Zähler durch den Nenner**. Zähler und Nenner sind in der Regel ganze Zahlen. Man könnte für den Bruchstrich auch ein Divisionszeichen benutzen, wenn man gegebenenfalls Zähler und Nenner in Klammern setzt (das ist nur nötig, wenn dort eine ganze Rechnung steht, bei einer einzigen Zahl ist das unnötig):

Bruch $= \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = (\text{Zähler}) \div (\text{Nenner})$

Dies muss man vor allem beim Eingeben der Rechnung in den Taschenrechner beachten.

Ein Beispiel:

$$\frac{98 \div 7}{23 - 16} = (98 \div 7) \div (23 - 16) = 14 \div 7 = 2$$

Manche Taschenrechner ermöglichen die Eingabe eines Bruchstriches. In diesem Fall sind die Klammern bei der Eingabe nicht nötig.

Einen Bruch kann man in vielen Formen schreiben, die alle für die gleiche Zahl stehen. Man kann entweder den Zähler und den Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren (= **Erweitern**) oder dividieren (= **Kürzen**), ohne dass sich der Wert des Bruches dadurch ändert.
Wozu braucht man das? Kürzen führt zu einer einfacheren Darstellung eines Bruches und sollte bei jedem Bruch angewandt werden, bis nicht mehr weiter gekürzt werden kann. Erweitert wird ein Bruch, wenn man ihn mit anderen Brüchen vergleichen, zusammenzählen oder subtrahieren will.

Zwei Beispiele:

- Erweitern: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{4}{8} = \frac{4 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{20}{40} = \ldots$
- Kürzen: $\frac{10}{30} = \frac{10 \div 5}{30 \div 5} = \frac{2}{6} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$

Übungsaufgaben:
Kürze folgende Brüche so weit wie möglich.

22. $\frac{18}{48} =$

23. $\frac{450}{135} =$

24. $\frac{360}{330} =$

Hat ein Bruch einen Zähler, der größer als der Nenner ist, nennt man ihn einen **unechten Bruch**. Einen solchen Bruch kann man als **gemischte Zahl** schreiben. Das Ergebnis der Division von Zähler durch Nenner schreibt man als ganze Zahl hin, dahinter den Rest der Division als Bruch.
Wenn man umgekehrt eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch umwandeln will, muss man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplizieren und dann den Zähler des Restes addieren, dann erhält man den Zähler des gesuchten Bruches. Der Nenner bleibt dabei erhalten.

Zwei Beispiele:

- unechter Bruch > gemischte Zahl:
  $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$, weil $20 \div 3 = 6$ Ganze und Rest 2

- gemischte Zahl > unechter Bruch:
  $9\frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{39}{4}$

Übungsaufgaben:
Stelle folgende unechte Brüche als gemischte Zahl dar.

25. $\dfrac{9}{5} =$

26. $\dfrac{52}{7} =$

27. $\dfrac{35}{3} =$

Stelle folgende gemischte Zahlen als unechte Brüche dar.

28. $4\frac{2}{3} =$

29. $8\frac{4}{9} =$

30. $2\frac{6}{7} =$

Rechenregeln für Brüche:

- Bevor man Brüche addiert / subtrahiert muss man die Nenner der Brüche auf einen gemeinsamen erweitern. Danach addiert / subtrahiert man alle Zähler. Der Nenner des Ergebnisses ist der gemeinsame Nenner aller Brüche.
- Multipliziert man Brüche, so wird Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Man kann die Aufgabe oft durch vorheriges Kürzen vereinfachen.
- Ein Bruch wird durch einen anderen dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert.

Ein paar Beispiele:

- Addition /Subtraktion:
  $\frac{1}{3}-\frac{2}{7}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 7}-\frac{2\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{7}{21}-\frac{6}{21}=\frac{7-6}{21}=\frac{1}{21}$
- Multiplikation: Hier wurde vor der Rechnung über Kreuz gekürzt.
  $\frac{4}{9}\cdot\frac{15}{26}=\frac{4\div 2}{9\div 3}\cdot\frac{15\div 3}{26\div 2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{13}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 13}=\frac{10}{39}$
- Division:
  $\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 2}=\frac{15}{14}$

Übungsaufgaben:
Berechne die Ergebnisse mit Hilfe der obigen Regeln.

31. $\frac{7}{12}+\frac{3}{4}=$

32. $\frac{5}{6}-\frac{3}{7}=$

33. $\frac{13}{15}+\frac{3}{20}=$

34. $\frac{3}{20}\cdot\frac{15}{18}=$

35. $\frac{20}{33}\cdot\frac{11}{16}=$

36. $\frac{7}{24}\div\frac{28}{36}=$

1.4. Rechnen mit Potenzen

Was ist eine Potenz?
Nimmt man eine Zahl a mit sich selbst mal, so kann man als Abkürzung dafür auch eine Potenz schreiben. Z.B.:

$$a \cdot a = a^2$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3$$
$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$$

Das a nennt man bei Potenzen die Basis, die hochgestellte Zahl nennt man Exponent.

Achtung vor Verwechslungen!
3^2 ist nicht das gleiche wie $3 \cdot 2$, denn $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ und $3 \cdot 2 = 3 + 3 = 6$. Die Ergebnisse sind also nicht gleich!

Ein paar Beispiele:

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$	aber	$2 \cdot 2 = 2 + 2 = 4$
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$	aber	$5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15$
$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$	aber	$10 \cdot 4 = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$
$0,5^3 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$	aber	$0,5 \cdot 3 = 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5$

Rechenregeln für Potenzen:

- **Potenzen mit gleicher Basis:**

  Multipliziert man Potenzen mit gleicher Basis, werden die Exponenten addiert:
  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

  Dividiert man Potenzen mit gleicher Basis, werden die Exponenten subtrahiert:
  $x^n \div x^m = x^{n-m}$

- **Potenzen mit gleichem Exponenten:**

  Multipliziert / dividiert man Potenzen mit gleichem Exponenten, so kann man den Exponenten auch an das Produkt / den Quotienten der Basen setzen:
  $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ oder $x^n \div y^n = (x \div y)^n$

- **Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten:**

  Nur in diesem Fall kann man eine Summe / Differenz von Potenzen zusammenfassen. Man fasst die Potenz als Einheit auf und zählt diese zusammen oder subtrahiert sie:
  $2x^n + 4x^n = 6x^n$ oder $5y^m - y^m = 4y^m$

- **Potenzen werden Potenziert**, indem man die Exponenten multipliziert:
  $\left(10^3\right)^4 = 10^{3 \cdot 4} = 10^{12}$

Ein paar Beispiele:

- Potenzen mit gleicher Basis:
  $2^3 \cdot 2^6 = 2^{3+6} = 2^9 = 512$
  $2^{10} \div 2^4 = 2^{10-4} = 2^6 = 64$
- Potenzen mit gleichem Exponenten:
  $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$
  $12^3 \div 6^3 = (12 \div 6)^3 = 2^3 = 8$
- Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten::
  $2x^4 + 5x^4 - x^4 = 6x^4$
- Potenzen Potenzieren:
  $(x^4)^5 = x^{4 \cdot 5} = x^{20}$

Übungsaufgaben:
Berechne die Ergebnisse der Potenzen oder fasse die Terme so weit wie möglich zusammen.

37. $4^7 \div 4^4 =$
38. $a^{10} \cdot a^4 =$
39. $\dfrac{33^4}{11^4} =$
40. $5 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^5 =$
41. $9s^3 + 12t^7 - 5s^3 - 3t^7 =$
42. $4x^3 - 2x^5 =$
43. $2^3 + 3^4 =$
44. $(3^2)^3 =$
45. $(t^{15})^4 =$

Zehnerpotenzen
Potenzen zur Basis 10 sind ganz besondere Potenzen. weil unser Zahlensystem aus diesen aufgebaut ist (= Dezimalsystem). Manche der Zehnerpotenzen können auch als Vorsilben vor physikalische Einheiten gesetzt werden. Einen Überblick zeigt die folgende Tabelle.
Folgende Besonderheiten gelten für den Umgang mit Zehnerpotenzen:

- **Die Zahl 1** wird als Zehnerpotenz $\mathbf{10^0}$ geschrieben: $10^0 = 1$.
- **Dezimalzahlen, die kleiner als 1** sind, bekommen **negative Exponenten**. Der negative Exponent entspricht der Anzahl der Stellen, die hinter dem Komma stehen, z.B.: $0,0001 = 10^{-4}$.
  Eine Potenz mit einem negativen Exponenten **entspricht dem Kehrwert der Potenz mit gleichem positivem Exponenten**, z.B.: $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$.
- **Dezimalzahlen, die größer als 1** sind, bekommen **positive Exponenten**. Die positive Hochzahl entspricht der Anzahl der Nullen, die hinter der 1 stehen, z.B.: $10000 = 10^4$.

Vorsatz	Vorsatzzeichen	Dezimalfaktor	Zahlenwert
Piko	p	10^{-12}	0,000 000 000 001
Nano	n	10^{-9}	0,000 000 001
Mikro	μ	10^{-6}	0,000 001
Milli	m	10^{-3}	0,001
Centi	c	10^{-2}	0,01
Dezi	d	10^{-1}	0,1
-	-	10^0	1
Deka	da	10^1	10
Hekto	h	10^2	100
Kilo	k	10^3	1000
Mega	M	10^6	1 000 000
Giga	G	10^9	1 000 000 000
Tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000

Tabelle 1: Zehnerpotenzen und Vorsätze zu den Einheiten

Ein paar Beispiele zur Anwendung:

- Man kann sehr kleine Größen übersichtlicher schreiben:

$$m = 0,000\,000\,000\,005\,42\,\mathrm{g} = 5,42 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{g} = 5,42\,\mathrm{pg}$$

- Bei sehr großen Zahlen funktioniert das auch:

$$m = 5\,420\,000\,000\,000\,\mathrm{g} = 5,42 \cdot 10^{12}\,\mathrm{g} = 5,42\,\mathrm{Tg}$$

  Die Verwendung mancher Vorsätze mit manchen Einheiten ist nicht gebräuchlich, wie z.B. im Fall Tg, theoretisch kann man diese aber zusammen mit allen Vorsätzen verwenden.

- Bei der sog. **wissenschaftlichen Schreibweise** wird eine Zahl immer mit einer Stelle vor dem Komma geschrieben und die Größenordnung dann durch eine Zehnerpotenz angegeben, z.B.:
$$m = 0,000\,000\,075\,13\,\mathrm{g} = 7,513 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{g}$$
oder
$$m = 28\,400\,000\,000\,\mathrm{g} = 2,84 \cdot 10^{10}\,\mathrm{g}$$
- Auch bei der Umrechnung von Einheiten kann man die Vorsätze durch die entsprechenden Zehnerpotenzen ersetzen und erhält so den Umrechnungsfaktor, z.B.:
$$7900\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 7900\,\frac{10^3\,\mathrm{g}}{(10^2\,\mathrm{cm})^3} = 7900\,\frac{10^3\,\mathrm{g}}{10^6\,\mathrm{cm}^3} = 7900 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 7,9\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$
Wie im Beispiel gezeigt muss man bei Einheiten, die mit einem Exponenten versehen sind darauf achten, dass man diesen beim Umrechnen berücksichtigt.

Aufgaben:

46. Schreibe folgende Größenwerte in wissenschaftlicher Schreibweise und gebe diese durch den Einsatz von Einheiten-Vorsätzen in möglichst kompakter Form wieder:
    a) $0,000\,000\,007\,29\,\mathrm{m} =$
    b) $6\,135\,000\,\mathrm{J} =$
    c) $0,0481\,\mathrm{A} =$
    d) $0,000\,000\,000\,005\,38\,\mathrm{N} =$
    e) $800\,240\,000\,000\,000\,\mathrm{V} =$
    f) $3\,740\,000\,000\,\mathrm{m}^3 =$

47. Rechne folgende Größenwerte in die angegebenen Einheiten um:
    a) $5124,59\,\mathrm{N}$ in daN und kN
    b) $0,0425\,\mathrm{mm}$ in μm und in m
    c) $4,507\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}$ in $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mm}^3}$
    d) $751\,300\,000\,000\,\mathrm{mm}^2$ in km^2
    e) $1650\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ in $\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$
    f) $75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

1.5. Umstellen von Formeln

Für das **Umstellen von Formeln** ist eine kurze Anleitung kaum möglich. Wenn man aber ein Rezept angeben will, dann dieses:
Löse die Formel nacheinander in Rechenschritten auf, indem du die jeweilige Gegenoperation anwendest und dabei die Reihenfolge der Rechenoperationen umkehrst: Erst Strichrechnung, dann Punktrechnung, erst dann das Innere von Klammern und am Schluss die Exponenten. Man trennt also zuerst die "lockeren Bindungen", dann die "fest5en Bindungen". Am besten kann man das ganze an Beispielen zeigen.

Ein paar Beispiele:

- Erst Strichrechnung, dann Punktrechnung:

$$\begin{aligned} 3x - 9y + 15z &= 6 && \mid +9y - 15z \\ 3x &= 6 + 9y - 15z && \mid \div 3 \\ x &= 2 + 3y - 5z \end{aligned}$$

- Erst die Klammer isolieren:

$$\begin{aligned} 8\,(0,5x - 12) + 16y &= 24z && \mid -16y \\ 8\,(0,5x - 12) &= 24z - 16y && \mid \div 8 \\ 0,5x - 12 &= 3z - 2y && \mid +12 \\ 0,5x &= 3z - 2y + 12 && \mid \div 0,5 \\ x &= 6z - 4y + 24 \end{aligned}$$

- Exponenten am Schluss (Gegenoperation ist eine entsprechende Wurzel):

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15y &= 4z && \mid +15y \\ 2x^2 &= 4z + 15y && \mid \div 2 \\ x^2 &= \tfrac{4z+15y}{2} && \mid \sqrt{\square} \\ x &= \sqrt{\tfrac{4z+15y}{2}} \end{aligned}$$

- Achtung: Steht die gesuchte Größe im Nenner eines Bruchs, dann multipliziere zuerst mit dieser!

$$\begin{aligned} \frac{y+4}{z} &= \frac{2z-3}{0,2x} && \mid \cdot 0,2x \\ \frac{y+4}{z} \cdot 0,2x &= 2z - 3 && \mid \cdot z \\ (y+4) \cdot 0,2x &= (2z-3) \cdot z && \mid \div (y+4) \\ 0,2x &= \frac{(2z-3) \cdot z}{(y+4)} && \mid \div 0,2 \\ x &= \frac{(2z-3) \cdot z}{(y+4) \cdot 0,2} \end{aligned}$$

Übungsaufgaben:

Löse folgende Gleichungen nacheinander nach allen Unbekannten Größen auf!

48. Greifen drei Kräfte F_1, F_2, F_3 mit ihren Hebellängen l_1, l_2, l_3 an einem zweiseitigen Hebel an, lautet das Hebelgesetz z.B.:

    $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot l_3$

49. Der Weg s hängt bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0, der Endgeschwindigkeit v_t und der Zeit t zusammen:

    $s = \frac{1}{2} \cdot (v_0 + v_t) \cdot t$

50. Das Volumen V eines Körpers lässt sich bei Temperaturerhöhung ΔT aus dem Anfangsvolumen V_0 und dem Volumenausdehnungskoeffizienten α_v berechnen:

    $V = V_0 \cdot (1 + \alpha_v \cdot \Delta T)$

51. Die Hubleistung P_{Hub} lässt sich aus der Masse m, der Fallbeschleunigung g, der Höhe h und der Zeit t berechnen:

    $P_{Hub} = \dfrac{m \cdot g \cdot h}{t}$

52. Die Gasgleichung stellt den Zusammenhang von den Drücken p_1 und p_2, den Volumen V_1 und V_2 und den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 dar:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

53. Die Fläche eines Trapezes hängt von den beiden Seitenlängen l_1, l_2 und der Höhe h ab:

$$A = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$$

54. Das Volumen eines Kegels berechnet man aus dem Durchmesser d und der Höhe h:

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot h}{12}$$

55. Die Fläche eines Kreisrings hängt von den beiden Durchmessern D und d ab:

$$A = \left(D^2 - d^2\right) \cdot \frac{\pi}{4}$$

56. Das Volumen einer Kugel hängt vom Durchmesser d ab:

$$V = \frac{d^3 \cdot \pi}{6}$$

57. Die Formel für den Kapitalendwert K_n hängt ab vom Kapitalanfangswert K_0, dem Zinssatz p und der Anlagedauer n:

$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ (Löse die Formel nach p auf)

58. Die Auftreffgeschwindigkeit v beim freien Fall hängt mit der Fallbeschleunigung g und dem Weg s zusammen:

$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s}$

59. Die Normalkraft F_N berechnet sich an der schiefen Ebene aus der Gewichtskraft F_G und dem Steigungswinkel α:

$F_N = F_G \cdot \cos \alpha$

60. Die Hangabtriebskraft F_H berechnet sich an der schiefen Ebene aus der Gewichtskraft F_G und dem Steigungswinkel α:

$F_H = F_G \cdot \sin \alpha$

2. Dreisatz und Prozentrechnung

2.1. Einfacher Dreisatz (proportional)

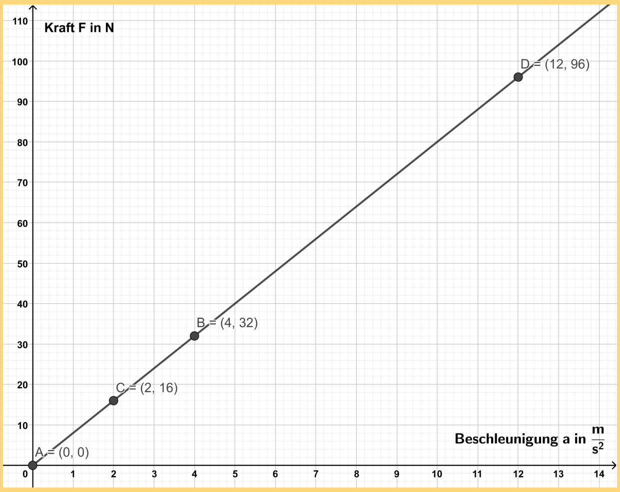
Zwei Größen sind **proportional** zueinander, wenn bei Vergrößerung / Verkleinerung der einen Größe um einen Faktor x, die andere Größe um den gleichen Faktor x größer / kleiner wird. An physikalischen Formeln kann man das erkennen, wenn die beiden Größen sich nur durch einen sog. **Proportionalitätsfaktor** unterscheiden. Z.B. gilt für eine Kraft:

$$F = m \cdot a$$

Kraft und Beschleunigung sind proportional bei konstanter Masse. Das gleiche gilt für Kraft und Masse, wenn die Beschleunigung konstant ist. Man kann auch sagen, dass das Verhältnis der beiden proportionalen Größen konstant ist, also z.B.:

$$\frac{F}{a} = \text{konstant} = m \qquad \text{oder} \qquad \frac{F}{m} = \text{konstant} = a$$

Stellt man die Zusammenhänge grafisch dar, so erhält man eine **Gerade**, die durch den Koordinatenursprung geht:



Bei proportionalen Zusammenhängen kann man den **einfachen Dreisatz** für Berechnungen verwenden.

Ein Beispiel

Um einen Gegenstand mit einer bestimmten Masse mit einer Beschleunigung von $4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ zu beschleunigen, benötigt man eine Kraft eine Kraft von $32\,\mathrm{N}$. Will man den gleichen Gegenstand auf die dreifache Beschleunigung bringen, so muss man auch die Kraft verdreifachen:

Beschleunigung	Kraft
$4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$32\,\mathrm{N}$
$4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3 = 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$32\,\mathrm{N} \cdot 3 = 96\,\mathrm{N}$
$4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \div 2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$32\,\mathrm{N} \div 2 = 16\,\mathrm{N}$

2.2. Umgekehrter Dreisatz (antiproportional)

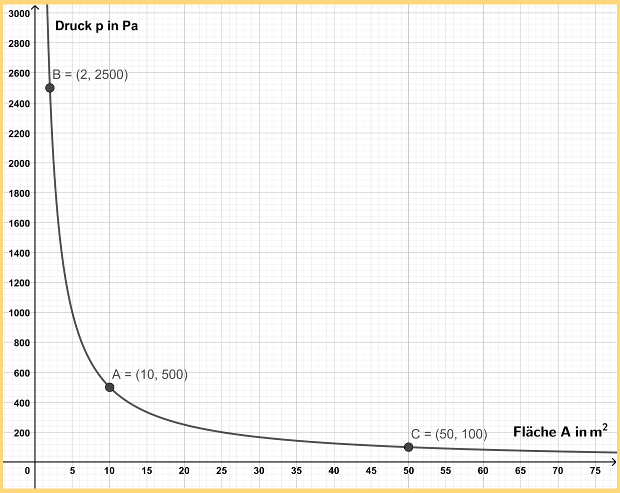
Zwei Größen sind **antiproportional** zueinander, wenn bei Vergrößerung / Verkleinerung der einen Größe um einen Faktor x, die andere Größe um den gleichen Faktor x kleiner / größer wird, die Größen sich also umgekehrt verhalten. An physikalischen Formeln kann man das erkennen, wenn sich die eine Größe wie der Kehrwert der anderen Größe verhält. Wenn die beiden Größen auf verschiedenen Seiten der Formel stehen, steht die eine Größe im Nenner eines Bruchs. Z.B. gilt für den Druck:

$$p = \frac{F}{A}$$

Druck und Fläche sind antiproportional bei konstanter Kraft. Man kann auch sagen, dass das Produkt der beiden antiproportionalen Größen konstant ist, also z.B.:

$$p \cdot A = \text{konstant} = F$$

Stellt man die Zusammenhänge grafisch dar, so erhält man eine **Hyperbel**:



Bei antiproportionalen Zusammenhängen kann man den **umgekehrten Dreisatz** für Berechnungen verwenden.

Ein Beispiel

Bei konstanter Kraft auf eine Querschnittsfläche A von $10\,\text{mm}^2$ beträgt der Druck $p = 500\,\text{Pa}$. Verfünffacht man bei gleicher Kraft die Querschnittsfläche, so sinkt der Druck auf ein Fünftel des anfänglichen Wertes:

Fläche	Druck
$10\,\text{mm}^2$	$500\,\text{Pa}$
$10\,\text{mm}^2 \cdot 5 = 50\,\text{mm}^2$	$500\,\text{Pa} \div 5 = 100\,\text{Pa}$
$10\,\text{mm}^2 \div 5 = 2\,\text{mm}^2$	$500\,\text{Pa} \cdot 5 = 2500\,\text{Pa}$

Übungsaufgaben zu proportionalen / antiproportionalen Zuordnungen:

61. In einer Tiefe von $25\,\text{m}$ unter der Wasseroberfläche herrscht ein Druck von $2,45\,\text{bar}$.
    a) Welcher Druck herrscht in einer Tiefe von $71\,\text{m}$?
    b) In welcher Tiefe herrscht ein Druck von $8,42\,\text{bar}$?

62. Sauerstoff befindet sich in einem Kolben mit dem Volumen $850\,\text{ml}$ und einem Druck von $3,5\,\text{bar}$.
    a) Welcher Druck herrscht im Kolben, wenn sein Volumen auf $500\,\text{ml}$ verringert wird?
    b) Welches Volumen nimmt die gleiche Menge Sauerstoff ein, wenn im Kolben ein Druck von $1,8\,\text{bar}$ herrscht?

63. Ein größerer Swimmingpool soll mit Wasser befüllt werden. Vier gleich starke Pumpen brauchen dafür 9 Stunden.
    a) Wie lange dauert das Befüllen, wenn man 6 Pumpen zur Verfügung hat?
    b) Wie viele Pumpen braucht man, wenn der Vorgang in 12 Stunden abgeschlossen sein soll?

64. Ein Metallstab dehnt sich bei einer Temperaturerhöhung um $35°$ um $4,2\,\mathrm{mm}$ aus.
    a) Wie groß ist die Ausdehnung, bei einer Temperaturerhöhung um $245°$?
    b) Um wie viel Grad muss die Temperatur erhöht werden, damit sich der Stab um $1,37\,\mathrm{cm}$ ausdehnt?

2.3. Prozentrechnung

Die Prozentsätze und Prozentwerte bei der **Prozentrechnung** sind einander proportional zugeordnet und können deshalb genau wie diese mit Hilfe eines einfachen Dreisatzes bewältigt werden. Dem sog. Grundwert werden dabei 100% als Prozentsatz zugeordnet.

Übungsaufgaben:

65. Der Monatslohn eines Angestellten betrug bisher 2500 € und wird nun um 4% erhöht. Um wie viel Euro wird sein Monatslohn erhöht?

66. Wie viel Geld bekommt der gleiche Angestellte monatlich, wenn ihm nach der Lohnerhöhung der Lohn nun wieder um 4% gekürzt wird?

67. Um wie viel Prozent wurde der Lohn eines Angestellten erhöht, der vor der Erhöhung 1800 € und nachher 2025 € verdient?

68. Der Preis eines Produktes beträgt nach einer Preiserhöhung um 8% 135 €. Wie hoch war der Preis vor der Erhöhung?

69. Eine Angestellte bezahlt 24% Steuern auf ihr Gehalt, das sind monatlich 437,50 €. Wie hoch ist ihr Nettolohn?

70. Ein Veranstaltungszentrum sollte laut Planung für 77 Millionen € gebaut werden, kostet nun aber voraussichtlich 789 Millionen €. Wie hoch ist die Kostensteigerung in Prozent?

71. Ein Produkt kostet 1599 € inklusive Mehrwertsteuer von 19%. Wie hoch ist der Preis ohne Mehrwertsteuer?

3. Geometrie

3.1. Berechnung von Fläche, Volumen, Masse und Gewichtskraft

Flächen- und Volumeneinheiten:
Beim Umrechnen von Flächen- und Volumeneinheiten muss man beachten, dass hier andere Umrechnungsfaktoren gelten als zwischen den entsprechenden Längeneinheiten. Zwei Beispiele:

- **Flächeneinheiten:**

  Für die Umrechnung von m in mm gilt: $1\,\text{m} = 1000\,\text{mm}$
  Für die Umrechnung von m^2 in mm^2 gilt: $1\,\text{m}^2 = 1000\,\text{mm} \cdot 1000\,\text{mm} = 1\,000\,000\,\text{mm}^2$

- **Volumeneinheiten:**

  Für die Umrechnung von m in mm gilt: $1\,\text{m} = 1000\,\text{mm}$
  Für die Umrechnung von m^3 in mm^3 gilt:
  $1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{mm} \cdot 1000\,\text{mm} \cdot 1000\,\text{mm} = 1\,000\,000\,000\,\text{mm}^3$

- Außerdem gilt für **nicht-metrische Volumeneinheiten**:

  $1\,\text{cm}^3 = 1\,\text{ml}$ und $1\,\text{dm}^3 = 1\,\text{l}$ und $1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{l}$

Übungsaufgaben

72. Vervollständigen Sie die Längeneinheiten in folgender Tabelle:

mm	cm	dm	m	km
7850				
		24,75		
				1,38

73. Vervollständigen Sie die Flächeneinheiten in folgender Tabelle:

mm^2	cm^2	dm^2	m^2	km^2
6500				
		325		
				0,0075

74. Vervollständigen Sie die Volumeneinheiten in folgender Tabelle:

mm^3	cm^3	dm^3	m^3	ml	l
24350					
		1028			
					62,9

Zusammenhang zwischen Volumen, Masse und Gewichtskraft eines Körpers:

Will man die Masse m eines Gegenstandes aus einem bekannten Material bestimmen, so muss man sein Volumen V mit der Dichte ρ des Materials multiplizieren:

$$m = V \cdot \rho$$

Die Dichte verschiedener Materialien findet man in der Formelsammlung.

Die Gewichtskraft eines Gegenstandes F_G erhält man, wenn man die Masse m mit der Fallbeschleunigung auf der Erde $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ multipliziert:

$$F_G = m \cdot g$$

Übungsaufgaben

75. Eine rechteckige Fläche soll mit einer LED-Lichtleiste von 30 m Länge eingefasst werden. Die Länge l der Fläche soll doppelt so lang wie die Breite b sein. Wie ist die Länge und Breite der Fläche zu wählen, um die Lichtleiste komplett zu verbauen?

76. Ein zylindrischer Behälter soll ein Volumen von 200 l fassen können und einen Durchmesser von 50 cm haben. Welche Höhe h muss der Zylinder haben?

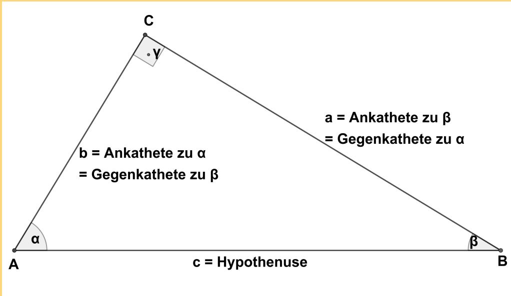
77. Eine massive Betonkugel hat einen Durchmesser von $d = 75\,\mathrm{cm}$. Die Dichte von Beton beträgt $\rho_{Beton} = 2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.
    a) Wie groß ist die Oberfläche O der Kugel in m^2?
    b) Berechne das Volumen V der Kugel in Liter.
    c) Welche Masse m hat die Kugel?
    d) Wie groß ist ihre Gewichtskraft F_G?

78. Eine zylindrische Säule soll aus Pappe gebaut werden. Die Höhe der Säule soll $h = 3{,}20\,\mathrm{m}$ betragen, ihr Durchmesser $d = 0{,}68\,\mathrm{m}$. Der Boden und Deckel der Säule ist jeweils eine runde Pappe mit dem Radius $r = 0{,}42\,\mathrm{m}$. Die verwendete Graupappe hat eine Stärke von $2\,\mathrm{mm}$ und ein Gewicht von $1200\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2}$.
    a) Wie viel Graupappe benötigt man zum Bau dieser Säule in m^2, wenn man für Verschnitt zusätzlich 35% hinzu rechnet?
    b) Welche Masse hat die fertige Säule, wenn man mit etwa $250\,\mathrm{g}$ Klebstoff rechnet?

79. Auf der Bühne soll ein Indianerzelt in Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche aufgebaut werden. Das Zelt soll eine Höhe $h = 2,80\,\mathrm{m}$ und eine Seitenlänge der Grundfläche $a = 4,50\,\mathrm{m}$ haben.
   a) Wie groß ist die Diagonale d der Grundfläche?
   b) Wie lang müssen die vier Stangen für die Seitenkanten der Pyramide sein, wenn sie 40 cm über die Spitze der Pyramide hinaus reichen sollen?
   c) Welchen Winkel α schließen die Stangen mit dem Bühnenboden ein?
   d) Wie viel Stoff braucht man für die Zeltplane mindestens?

3.2. Berechnungen von Größen im rechtwinkligen Dreieck

Für **rechtwinklige Dreiecke** gelten zwei wichtige Zusammenhänge, der **Satz des Pythagoras** und die **Winkelfunktionen**:



- Mit dem **Satz des Pythagoras** kann man aus zwei Seiten des Dreiecks die dritte Seite berechnen:
$$\mathrm{HYP}^2 = \mathrm{AK}^2 + \mathrm{GK}^2$$
- Mit den **Winkelfunktionen** kann man aus den Seitenverhältnissen im Dreieck Winkel berechnen oder umgekehrt. Es gibt drei wichtige Winkelfunktionen für folgende Seitenverhältnisse:
$$\sin\alpha = \frac{GK}{HYP}$$
$$\cos\alpha = \frac{AK}{HYP}$$
$$\tan\alpha = \frac{GK}{AK}$$

Übungsaufgaben

80. In einem Dreieck sind folgende Seiten und Winkel gegeben. Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel (Benennung wie in obiger Skizze):

    a) $a = 7,6\,\mathrm{cm}$, $c = 15,5\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 90°$

    b) $\alpha = 32,3°$, $b = 12,6\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 90°$

81. Aus einem Baumstamm mit dem Duchmesser $d = 48\,\text{cm}$ soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt gefertigt werden. Die Breite des Balkens soll 37,5 cm betragen. Wie hoch kann der Balkenquerschnitt maximal sein?

82. Eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ($a = 0,85\,\text{m}$, $b = 0,42\,\text{m}$) hat eine Höhe $h = 1,25\,\text{m}$. Berechne die Mantelfläche A_M und die Oberfläche A_O.

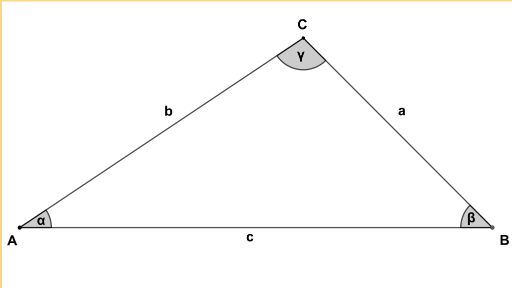
83. Eine schiefe Ebene soll als Rampe auf eine Bühne führen. Sie soll dabei eine Höhe $h = 0,80\,\text{m}$ überwinden und soll in einem Abstand von 5,50 m vor der Bühne beginnen.
   a) Wie lang ist die schiefe Ebene?

   b) Welchen Steigungswinkel α hat die schiefe Ebene?

   c) Drücke die Steigung der schiefen Ebene in Prozent aus.

3.3. Berechnungen von Größen im allgemeinen Dreieck

Für **allgemeine Dreiecke** gelten zwei Zusammenhänge, der **Sinussatz** und der **Kosinussatz**:



- Mit dem **Sinussatz** kann man in vielen Fällen aus drei gegebenen Größen (Seiten und Winkel) alle anderen Größen des Dreiecks berechnen. Der Sinussatz ist eine Verhältnisgleichung, die man in einem Satz so formulieren könnte: Das Verhältnis einer Seite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels ist in einem Dreieck konstant.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

- Der **Kosinussatz** ist komplizierter und wird deshalb nur in den beiden Fällen angewandt, in denen der Sinussatz nicht ausreicht: Es sind alle drei Seiten des Dreiecks bekannt, aber keine Winkel oder es sind nur zwei Seiten des Dreiecks bekannt und der von ihnen eingeschlossene Winkel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Übungsaufgaben

84. In einem Dreieck sind folgende Seiten und Winkel gegeben. Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel (Benennung wie in obiger Skizze):

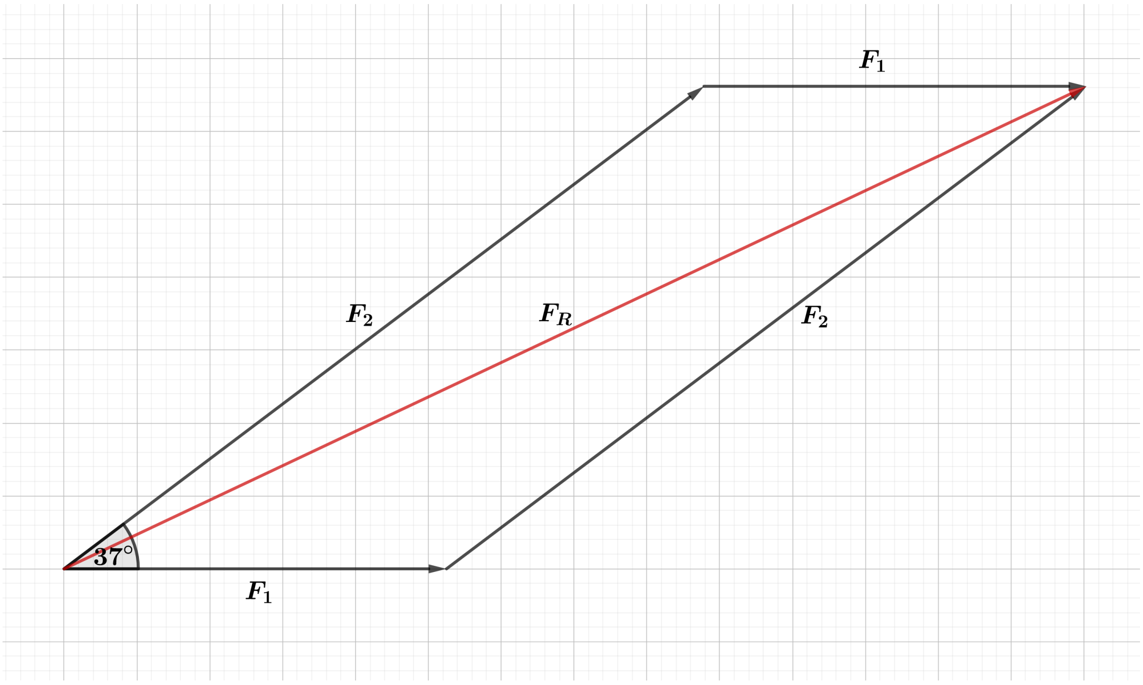
    a) $a = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$, $\gamma = 80°$

b) $a = 5\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$, $\gamma = 70^\circ$

c) $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 42^\circ$

d) $a = 4,5\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $c = 7,2\,\text{cm}$

85. Bestimme die resultierende Kraft aus den Kräften $F_1 = 525\,\mathrm{N}$ und $F_2 = 1100\,\mathrm{N}$, die einen Winkel von 37° einschließen, wie in der folgenden Skizze dargestellt.



Teil II.
Grundlagen Physik

4. Rechnen mit physikalischen Einheiten

Basis-Größen und Basis-Einheiten:

Der Wert einer Größe wird **Größenwert** genannt. Er ist das Produkt aus **Zahlenwert** und **Einheit** der Größe, wobei normalerweise das Produktzeichen nicht mitgeschrieben wird. Z.B. ist $m = 3\,\text{kg}$ die Angabe eines Größenwerts (hier: die Masse eines Gegenstandes) bestehend aus dem Zahlenwert 3 und der Einheit kg (Kilogramm).
Manche Größen sind durch das **SI (Système international d'unités)** als **Basisgrößen** festgelegt. Die zugehörigen **Basiseinheiten** können nicht aus anderen Einheiten zusammengesetzt werden, man kann aber alle anderen Einheiten aus ihnen zusammensetzen. Insgesamt gibt es sieben Basisgrößen, die in der untenstehenden Tabelle aufgeführt sind.

Basisgröße	Formelzeichen	Basiseinheit	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_V	Candela	cd

Jede andere Einheit für eine physikalische Größe lässt sich aus einem Produkt von Potenzen der Basiseinheiten zusammensetzen. Wenn man es sich mit dem Verrechnen von verschiedenen Einheiten besonders einfach machen will, dann sollte man folgendes Vorgehen befolgen:

- Bevor man Größen in Formeln einsetzt, rechnet man diese in Basiseinheiten oder in die Grundeinheit der jeweiligen Größe um (siehe Tabelle in der Formelsammlung).
- Erst dann setzt man alle Größen in die Formel ein.
- Nun kommt bei der Berechnung auch ganz automatisch die Grundeinheit der berechneten Größe heraus.

Ein Beispiel

Berechnet man beispielsweise die Kraft F, die benötigt wird um eine Masse m von $550\,\text{g}$ anzuheben, so setzt man die Masse am besten in kg und die Fallbeschleunigung g in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ein und erhält dann auch automatisch als Einheit die Grundeinheit der Kraft, nämlich Newton:

$$F = m \cdot g = 0,55\,\text{kg} \cdot 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 5,40\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 5,40\,\text{N}$$

In folgender Tabelle sind ein paar Beispiele zu wichtigen abgeleiteten physikalischen Einheiten dargestellt:

Physikalische Größe	Formelzeichen	Einheit	Einheiten-zeichen	Darstellung in Basiseinheiten
Kraft	F	Newton	N	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Drehmoment	M	Newtonmeter	Nm	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Druck	p	Pascal	Pa	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Arbeit / Energie	W bzw. E	Joule	J	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Leistung	P	Watt	W	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3}$

Aufgaben:

Berechne folgende Größenwerte mit Hilfe der angegebenen Formeln. Achte dabei auf die Einheiten:

86. Berechnen Sie die Hubarbeit W_{Hub}, die man aufwenden muss, um eine Masse von $m = 2,5\,\mathrm{t}$ auf eine Höhe $h = 1250\,\mathrm{mm}$ zu heben, wenn die Erdbeschleunigung $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beträgt (Ergebnis in Joule):

    $W_{Hub} = m \cdot g \cdot h$

87. Welche Leistung P wird bei dem Vorgang aus Aufgabe 103 erbracht, wenn dafür eine Zeit $t = 2\,\mathrm{min}$ nötig ist (Ergebnis in Watt)?

    $P = \dfrac{W}{t}$

88. Berechnen Sie den Druck p in einem Kolben, wenn die Luft mit einer Kraft F von 3,5 kN auf eine Fläche A des Kolbens von $85\,\mathrm{mm}^2$ drückt (Ergebnis in Pa).

    $p = \dfrac{F}{A}$

89. Berechnen Sie das Drehmoment M eines Schraubenschlüssels, wenn der Hebel der Länge $l = 24,5\,\mathrm{cm}$ an seinem Ende mit einer senkrechten Kraft F von 77 daN belastet wird (Ergebnis in Nm).

    $M = F \cdot l$

90. Wie groß ist die Gewichtskraft F_G eines Gegenstandes, wenn zum Heben des Gegenstandes auf eine Höhe h von 540 cm eine Hubarbeit $W = 108\,\mathrm{kJ}$ benötigt wird (Ergebnis in N).

    $W_{Hub} = F_G \cdot h$

5. Grundlagen der technischen Mechanik

5.1. Die drei Grundprinzipien von Newtons Mechanik

Die technische Mechanik ist ein Teilgebiet der Physik, das sich mit der Anwendung physikalischer Gesetze auf technische Einrichtungen beschäftigt. Die physikalischen Grundlagen, die in der technischen Mechanik zur Anwendung kommen, hat Isaac Newton entwickelt. Nach ihm ist die Einheit der vielleicht wichtigsten Größe der Mechanik benannt, der Kraft. Seine Aussagen zur Mechanik fasste er in vier Prinzipien zusammen, deren Anwendung auf die verschiedenen Teilgebiete der technischen Mechanik ein Verständnis der in ihnen behandelten Zusammenhänge ermöglicht:

- **Prinzip der Trägheit**
  Ein Körper, auf den keine resultierende Kraft wirkt, verharrt in seinem Bewegungszustand, behält also die Richtung der Bewegung und die Geschwindigkeit bei.
- **Dynamisches Grundgesetz**
  Ändert ein Körper seinen Bewegungszustand, so wirkt eine Kraft auf ihn: $F = m \cdot a$. Kraft = Masse mal Beschleunigung.
- **Prinzip von Aktion und Reaktion**
  Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio).
- **Superpositionsprinzip**
  Kräfte, die auf einen Körper wirken überlagern sich störungsfrei. Sie können zu einer resultierenden Kraft zusammengefasst werden, die in ihrer Wirkung auf den Körper der Wirkung der Einzelkräfte entspricht.

Ein paar Beispiele zur Anwendung der Newtonschen Prinzipien:

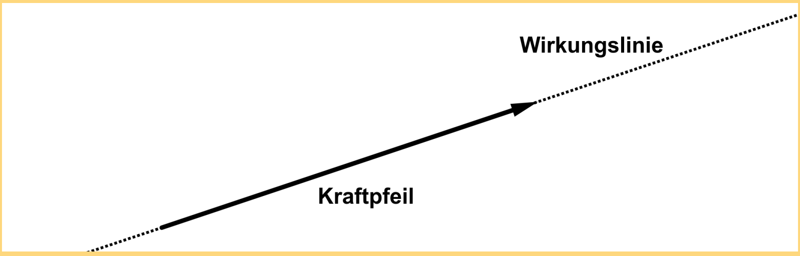
- Eine Rakete, die aus dem Schwerefeld der Erde und in den fast materiefreien Weltraum gelangt ist, bewegt sich ohne Antrieb mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Linie fort. Auf der Erde wird jede Bewegung durch Reibungskräfte verzögert, so dass sie nach einer Zeit zum Erliegen kommt.
- Um ein Fahrzeug (aus der Ruhe) zu beschleunigen braucht man Kraft (Motorkraft oder Muskelkraft). Je schwerer das Fahrzeug, desto mehr Kraft braucht man.
- Die Kraft, die ein an einem Seil hängender Körper auf dieses Seil bewirkt, wirkt auch in umgekehrter Richtung vom Seil auf den Körper. Diese Art von Kräftegleichgewichten spielen in der Statik eine große Rolle. Man geht hier immer davon aus, dass sich an einem ruhenden Körper alle Kräfte im Gleichgewicht befinden. Auch in der Festigkeitslehre spielt dieses Prinzip eine große Rolle. Äußere Kräfte rufen hier im inneren der Körper entgegengesetzte Kräfte hervor, die die Festigkeit des Körpers gewährleisten.
- Es spielt keine Rolle, ob eine Kiste erst nach vorne und dann nach links oder ob sie direkt schräg nach links-vorne geschoben wird.

5.2. Kraft

Nach Newton ist eine Kraft F nötig, um eine Masse m mit der Beschleunigung a zu beschleunigen und so ihre Trägheit zu überwinden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer Massenträgheitskraft:

$$F = m \cdot a$$

Kräfte gehören zu den vektoriellen Größen. Diese werden durch drei Eigenschaften charakterisiert: Größe, Richtung und Angriffspunkt der Kraft. Zeichnerisch dargestellt werden Kräfte als Kraftpfeile:



Der Kraftpfeil liegt auf einer Wirkungslinie und zeigt mit der Spitze in die Wirkungsrichtung. Die Länge des Kraftpfeils entspricht der Größe der Kraft. Der Anfangspunkt des Kraftpfeils entspricht dem Angriffspunkt der Kraft.

Die Einheit der Kraft ist das Newton:

$$1\,\text{Newton} = 1\,\text{N} = 1\,\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Als Spezialfall dieser Massenträgheitskraft kann die Gewichtskraft F_G betrachtet werden, die durch die Gravitation auf alle Körper mit Masse wirkt:

$$F_G = m \cdot g$$

Der Faktor g wird auf der Erde Erdbeschleunigung genannt und hat hier den mittleren Wert:

$$g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Übungsaufgaben:

91. Wie groß ist die Gewichtskraft F_G mit der ein Körper der Masse $m = 35\,\text{kg}$ auf den Boden der Erde drückt (Erdbeschleunigung: $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)?

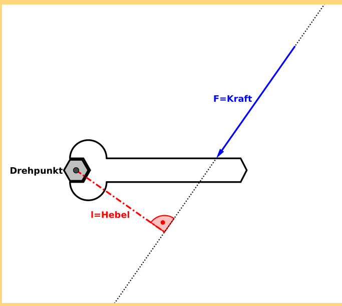
92. Wie groß ist die Gewichtskraft des gleichen Körpers, der sich nun aber auf der Oberfläche des Mondes (Mondbeschleunigung: $g = 1{,}62\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) befindet?

5.3. Kraftmoment

Das Kraftmoment M ist das Produkt aus der Kraft F und dem senkrechten Abstand zum Drehpunkt r:

$$M = F \cdot r$$

Das Kraftmoment wird je nach Wirkung auf ein Bauteil auch als Drehmoment (Drehung um eine Achse), Biegemoment (Biegung eines Trägers) oder Torsionsmoment (Verdrehung) bezeichnet. Den Fall eines Drehmomentes veranschaulicht folgende Zeichnung eines Schraubenschlüssels:



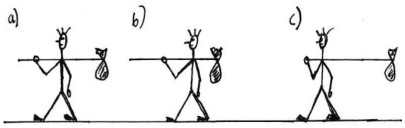
Die Kraft, die hier auf den Schraubenschlüssel wirkt, ist schräg zum Hebel. Die Länge des Hebels wird immer senkrecht zur Wirkungslinie einer Kraft gemessen als senkrechter Abstand zum Drehpunkt (hier: Schraubenachse).

Greifen mehrere Drehmomente an einem Körper an, der sich in Ruhe befindet, so sind diese Drehmomente im Gleichgewicht (Hebelgesetz). Man denke an eine Wippe, auf der zwei Kinder in gleicher Entfernung zum Drehpunkt sitzen (zweiseitiger Hebel).

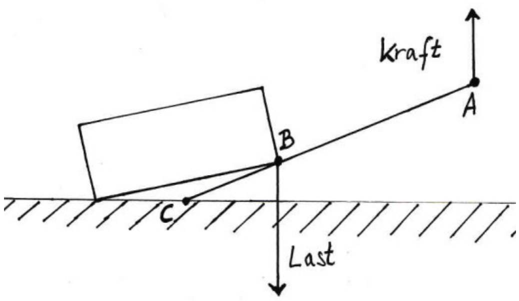
Auch auf sämtliche Antriebe, die über eine Drehbewegung funktionieren (Zahnradtriebe, Ketten- oder Riementriebe), lassen sich Gesetze anwenden, die auf Drehmomenten beruhen.

Übungsaufgaben:

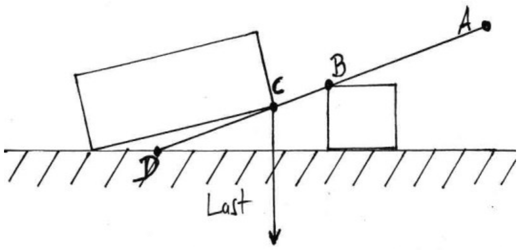
93. Auf welchem Bild macht sich Peterchen das Tragen seines Picknicks am leichtesten?



94. In welchem Punkt liegt der Drehpunkt? Wie lang sind die Hebel der Kraft und der Last? Zeichne diese in das Bild ein.



95. Wo liegt jetzt der Drehpunkt? Zeichne in das Bild die Kraft (ungefähre Größe) ein, die am Punkt A angreifen muss, um die Kiste zu heben.



96. Ein Balken, der sich um einen Punkt drehen kann, dient als Wippe. Ein Junge mit der Gewichtskraft 300 N sitzt 2,0 m von der Drehachse entfernt. Wo muss ein Junge mit der Gewichtskraft 250 N sitzen damit Gleichgewicht herrscht?

97. Auf einen zweiseitigen Hebel, der um eine Achse drehbar ist, wirken folgende senkrecht nach unten gerichtete Kräfte:
Links von der Drehachse: 20 N im Abstand von 30 cm; 25 N (20 cm); 15 N (10 cm).
Rechts von der Drehachse: 18 N (40 cm); 12 N (35 cm); x N (11 cm).
Wie groß muss die Kraft x sein, damit der Hebel im Gleichgewicht ist?

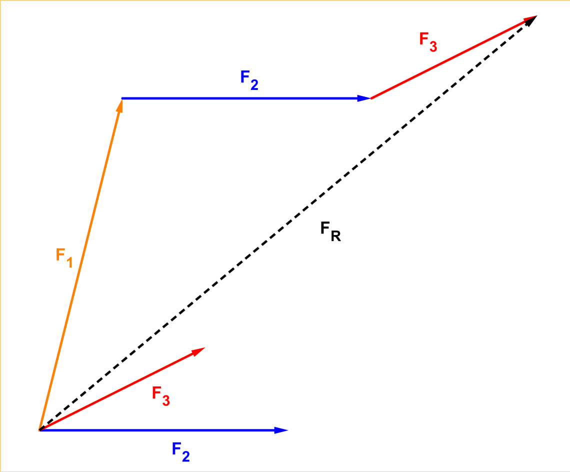
98. Ein Maßstab von der Länge 1 m, dessen Gewichtskraft vernachlässigt werden kann, soll als Hebel dienen und mit folgenden Massestücken belastet werden:
0,5 kg bei der 20 cm-Marke; 0,3 kg bei der 40 cm-Marke; 0,6 kg bei der 70 cm-Marke; 0,2 kg bei der 90 cm-Marke.
Wo muss die Drehachse liegen, damit Gleichgewicht herrscht?

6. Statik

6.1. Zentrales Kräftesystem

6.1.1. Kräfte zusammensetzen zu einer resultierenden Kraft

Nach dem Superpositionsprinzip kann man mehrere Kräfte zu einer resultierenden Kraft zusammensetzen. Zeichnerisch macht man das folgendermaßen: Man bildet aus allen Einzelkräften einen Vektorzug, indem man jeweils den Anfangspunkt eines Vektorpfeils an die Spitze des vorherigen setzt (die Richtung der Kräfte wird dabei nicht verändert). Die resultierende Kraft erhält man dann als Kraftpfeil vom ersten Anfangspunkt zum Endpunkt des Vektorzuges:



Rechnerisch bestimmt man unbekannte Kräfte durch die Winkelfunktionen, den Sinus- und Kosinussatz oder durch das Zerlegen der Kräfte in horizontale und vertikale Komponenten.

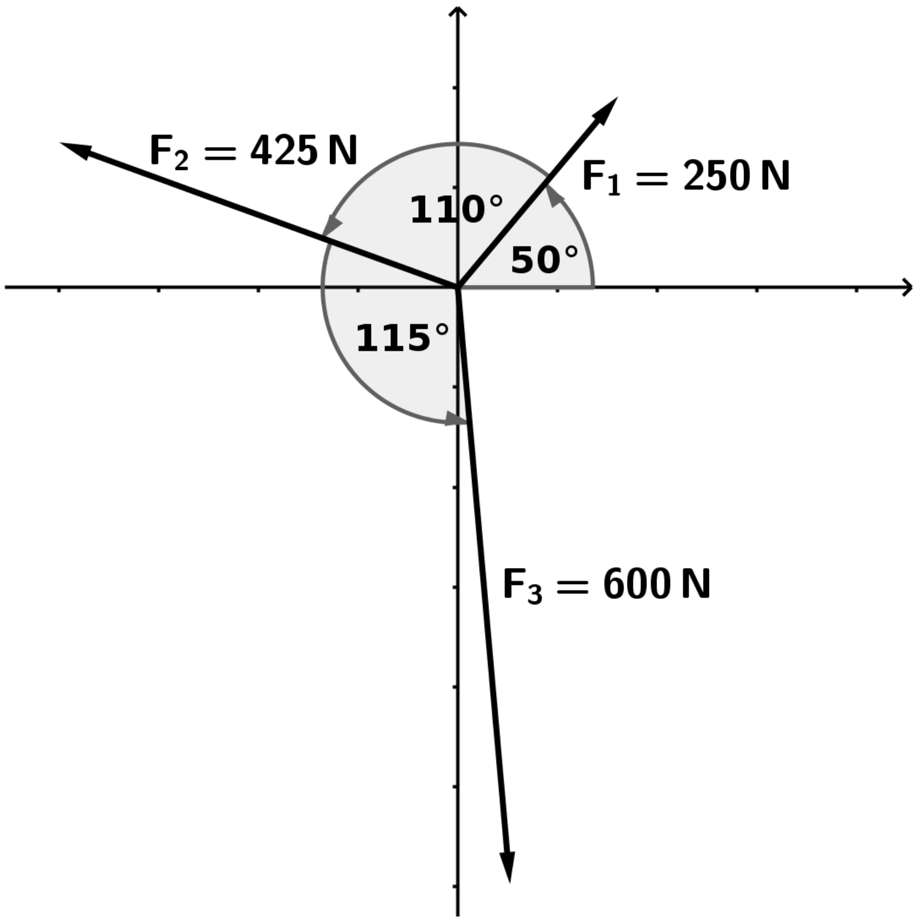
Übungsaufgaben: Finde zu den folgenden Aufgaben jeweils eine zeichnerische und eine rechnerische Lösung.

99. Drei Kräfte wirken in die gleiche Richtung: $F_1 = 150\,\text{N}$, $F_2 = 85\,\text{N}$ und $F_3 = 125\,\text{N}$. Wie groß ist die resultierende Kraft F_R und welche Richtung hat sie?

100. Zwei Kräfte wirken in entgegengesetzter Richtung: $F_1 = 120\,\text{N}$ und $F_2 = 90\,\text{N}$. Wie groß ist die resultierende Kraft F_R und welche Richtung hat sie?

101. Zwei Schlepper ziehen an einem Tanker, der eine mit 4350 kN in nördlicher Richtung, der andere mit 3800 kN mit 30° Abweichung vom ersten in Richtung Osten. In welche Richtung bewegt sich der Tanker und wie groß ist die resultierende Kraft F_R auf ihn?

102. Drei Kräfte greifen an einem Punkt an. Die Größe der Kräfte und ihre Lage bezüglich eines Koordinatensystems kannst du der folgenden Grafik entnehmen.



a) Bestimme zeichnerisch eine Lösung für die Richtung und Größe der resultierenden Kraft auf den Angriffspunkt der Kräfte.

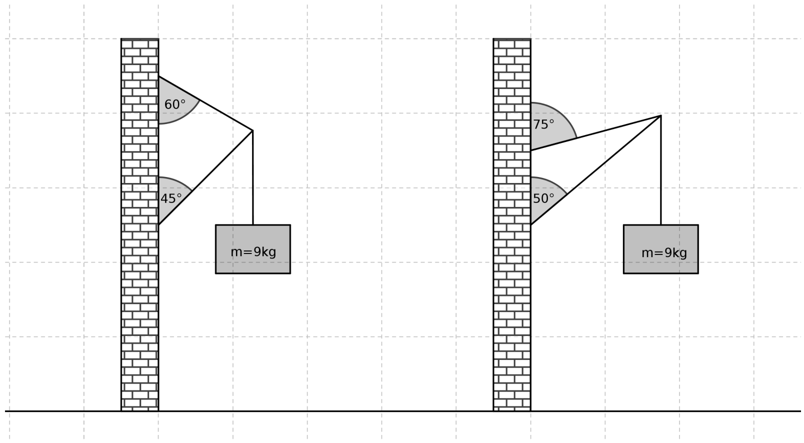
b) Bestätige die so ermittelten Ergebnisse durch eine Rechnung.

6.1.2. Eine Kraft in mehrere Kräfte zerlegen

Genau so, wie man mehrere Kräfte zu einer resultierenden Kraft zusammenfassen kann, kann man auch eine Kraft in mehrere Kräfte zerlegen, wenn man die Richtung ihrer Wirkungslinien kennt. Dies kann man sowohl grafisch als auch rechnerisch tun.

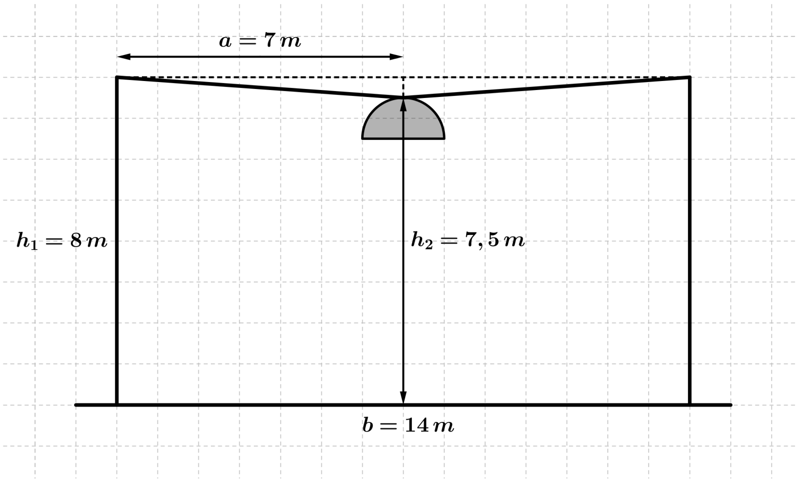
Übungsaufgaben: Finde zu den folgenden Aufgaben jeweils eine zeichnerische und eine rechnerische Lösung.

103. Um ein Schild der Masse $m = 9\,\text{kg}$ an einer Wand aufzuhängen, soll ein sog. Ausleger benutzt werden (vereinfachend wollen wir hier annehmen, dass die benutzten Stangen bzw. Seile kein Gewicht haben). Dazu stehen zwei verschiedene Optionen zur Auswahl:



   a) Zeichne in die Bilder alle wirkenden Kräfte ein (Zug-, Druck- und Gewichtskräfte)!
   b) Wie groß ist die Gewichtskraft F_G des Schildes?
   c) Bestimme zeichnerisch die Größe der Kräfte auf die Stangen bzw. Seile!
   d) Berechne nun diese Kräfte und überprüfe das Ergebnis mit Hilfe deiner Zeichnung!
   e) Welche der beiden Optionen kommt mit den geringeren Belastungen aus?

104. Eine Lampe mit der Gewichtskraft $F_G = 200\,\mathrm{N}$ soll wie folgt mit einem Seil angeschlagen werden:



a) Zeichne in das Bild alle wirkenden Kräfte ein!

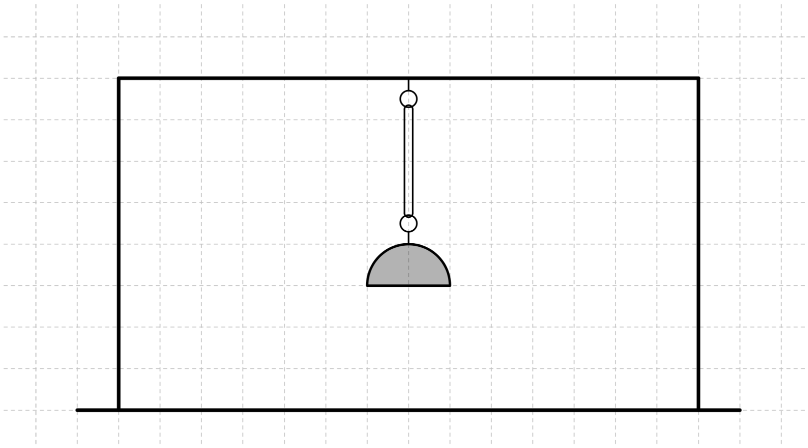
b) Bestimme zeichnerisch die Größe der Kräfte auf die beiden Seilstücke!

c) Berechne nun diese Kräfte und überprüfe das Ergebnis mit Hilfe deiner Zeichnung!

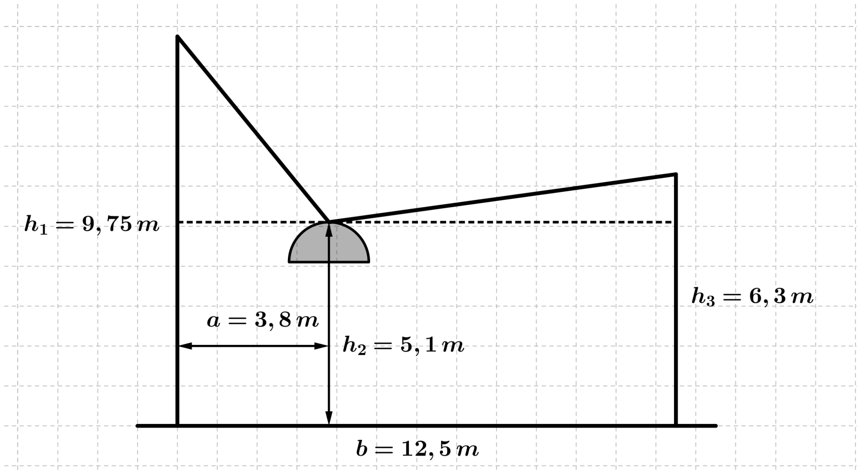
d) Wie verändern sich diese Zugkräfte, wenn man den Winkel α zwischen Seil und der Horizontalen ändert? Berechne die Zugkräfte für folgende Winkel α: 1°, 10°, 25°, 50°.

e) Ist es möglich das Seil so zu spannen, dass es ganz waagrecht hängt? Begründe!

f) Welche Zugkräfte wirken auf die zwei Seilstücke, wenn man die Lampe folgendermaßen aufhängt?



105. Nun soll die gleiche Lampe wie folgt mit einem Seil angeschlagen werden:



a) Zeichne in das Bild alle wirkenden Kräfte ein!

b) Bestimme zeichnerisch die Größe der Kräfte auf die beiden Seilstücke!

c) Berechne nun diese Kräfte und überprüfe das Ergebnis mit Hilfe deiner Zeichnung!

6.2. Allgemeines Kräftesystem (Auflagerkräfte)

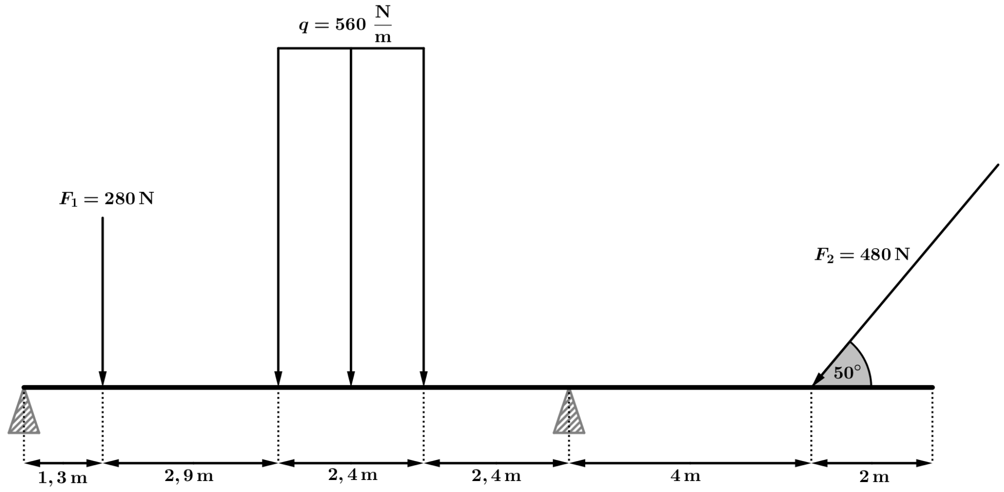
Greifen an einem Körper Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten an, spricht man von einem allgemeinen Kräftesystem. Oft handelt es sich dabei um Körper, die an einem oder an mehreren Punkten gelagert sind, sog. Auflagern. Um die Kräfte zu berechnen, die diese Auflager aufnehmen müssen, damit das System im Gleichgewicht bleibt, muss man zwei Annahmen machen:

1. Alle Kräfte in horizontaler und alle Kräfte in vertikaler Richtung müssen sich im Gleichgewicht befinden:
$$\sum F_x = 0 \text{ und } \sum F_y = 0$$
2. Alle Drehmomente bezüglich eines Auflagerpunktes als Drehpunkt müssen im Gleichgewicht sein:
$$\sum M = 0$$

Übungsaufgaben:

106. Ein Balken der Länge $6,5\,\mathrm{m}$ liegt jeweils mit seinen Enden auf den Stützen A und B. Drei Kräfte $\mathrm{F}_1 = 200\,\mathrm{N}$, $\mathrm{F}_2 = 150\,\mathrm{N}$ und $\mathrm{F}_3 = 350\,\mathrm{N}$ wirken senkrecht von oben auf den Balken. Die Kräfte haben die Abstände $2\,\mathrm{m}$, $2,5\,\mathrm{m}$ und $4\,\mathrm{m}$ zu A.
    a) Fertige eine Zeichnung mit allen wirkenden Kräften an!
    b) Stelle alle Gleichgewichtsbedingungen auf, die hier sinnvoll sind!
    c) Wie groß sind die Kräfte auf die beiden Stützen A und B?

107. Ein Balken der Länge 15 m ist mit dem einen Ende im Punkt A fest eingespannt (er kann sich also weder nach oben/ unten noch nach links/ rechts bewegen). In 9 m Entfernung von A liegt der Balken auf der Stütze B auf. Der Rest des Balkens steht über. Die Kraft $F_1 = 280\,\mathrm{N}$ wirkt in $1,3\,\mathrm{m}$ Entfernung von A senkrecht von oben auf den Balken. Der Balken ist mit einer Streckenlast $q = 560\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ über eine Strecke von $2,4\,\mathrm{m}$ belastet, die in $4,2\,\mathrm{m}$ Entfernung von A beginnt. Die Kraft $F_2 = 480\,\mathrm{N}$ wirkt in 13 m Entfernung von A mit einem Winkel von 50° schräg von rechts auf den Balken.
Die folgende Skizze zeigt diesen Aufbau schematisch.

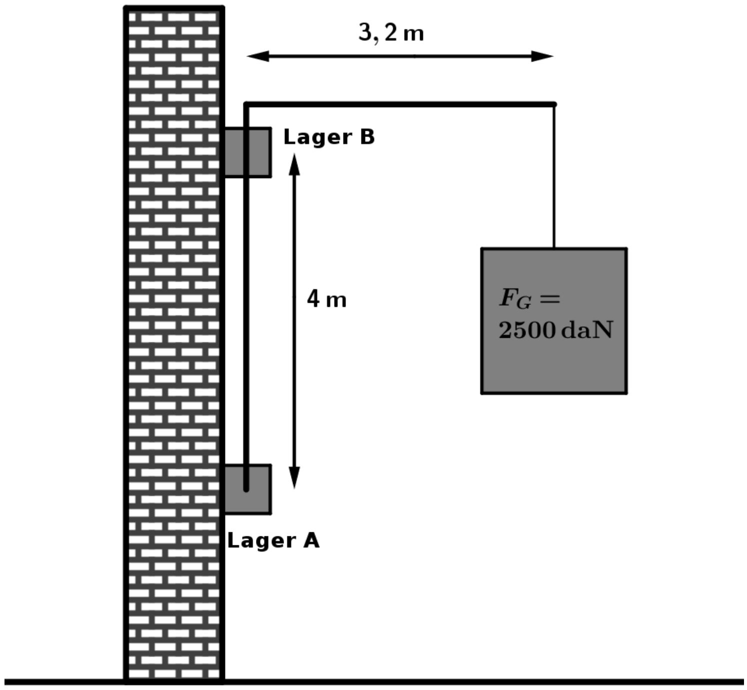


a) Trage in die Zeichnung alle in den beiden Lagerpunkten A und B wirkenden Kräften ein!

b) Stelle alle Gleichgewichtsbedingungen auf, die hier sinnvoll sind!

c) Berechne daraus die Kräfte auf die beiden Lager A und B?

108. Ein Wanddrehkran mit einer Hublast von $F_G = 2500\,\mathrm{daN}$ ist $4\,\mathrm{m}$ hoch und hat einen Schwenkarm der Länge $3,2\,\mathrm{m}$. Er ist in Punkt A auf dem Boden zweiwertig gelagert, in Punkt B am oberen Ende des Krans mit einem einwertigen Lager an der Wand befestigt. Das folgende Schema zeigt diesen Aufbau:



a) Fertige eine Zeichnung mit allen wirkenden Kräften an!

b) Stelle alle Gleichgewichtsbedingungen auf, die hier sinnvoll sind!

c) Wie groß sind die Kräfte auf die beiden Lager A und B?

6.3. Reibung

Bei jeder Form von Bewegung, bei der sich zwei Oberflächen berühren, tritt ein Widerstand gegen diese Bewegung auf, den man als Reibung bezeichnet. **Reibungskräfte** wirken immer entgegen der Bewegungsrichtung des Körpers und werden von folgenden Größen beeinflusst:

- Die Größe der Reibungskraft ist abhängig von der **Normalkraft** F_N, die die beiden Oberflächen zusammenpresst. Sie steht immer senkrecht zur Berührungsfläche.
- Die **Materialien**, die sich bei der Reibung berühren, haben einen Einfluss auf die Größe der Reibungskraft.
- Ebenso die **Oberflächenbeschaffenheit** der Materialien und ihre **Schmierung**.

Der Einfluss der letztgenannten Größen wird in einem Reibungskoeffizienten μ zusammengefasst, der in der Regel experimentell bestimmt wird. Es ergibt sich folgende Grundgleichung für Reibungskräfte:

$$F_R = F_N \cdot \mu$$

Man unterscheidet 3 Arten von Reibung:

- Die Haftreibungskraft muss überwunden werden, um einen Gegenstand in Bewegung zu setzen.
- Die Gleitreibungskraft wird benötigt, um ein bewegtes Objekt mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen.
- Eine Rollreibungskraft tritt bei Reibung zwischen Rollen, Rädern, Reifen und einer ebenen Oberfläche auf.

Je nach Reibungsart setzt man zur Berechnung der Reibungskraft entsprechende Koeffizienten in die Berechnungsformel ein. Viele Reibungskoeffizienten findet man in den üblichen Tabellenwerken. Diese sind allerdings eher als Schätzwerte zu betrachten. Genaue Reibungskoeffizienten müsste man jeweils für den speziellen Fall experimentell bestimmen.

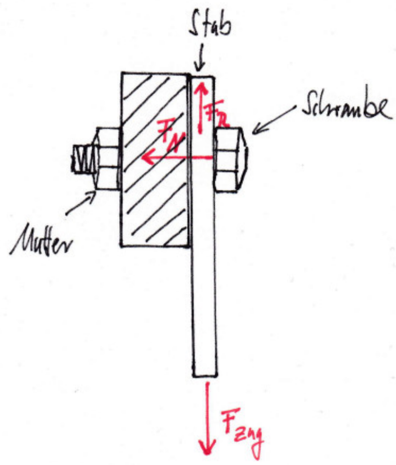
Übungsaufgaben:

109. Welche Kraft muss man verrichten, wenn man eine Kiste ($m = 50\,\mathrm{kg}$) auf ebenem Untergrund in Bewegung setzt (Haftreibungskoeffizient: $\mu = 0,75$) und dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter bewegt (Gleitreibungskoeffizient: $\mu = 0,6$)?

110. Das Laufrad eines Schienenfahrzeugs hat einen Durchmesser von $d = 280\,\mathrm{mm}$ und wird mit $F_N = 38\,\mathrm{kN}$ belastet. Wie groß ist die Rollreibungskraft F_{RR} und der Rollreibungskoeffizient bei einer Rollreibungszahl $l = 0,5\,\mathrm{mm}$?

111. Ein Körper der Masse 5 kg, der auf gerader Fläche steht, wird beim Aufwenden einer Kraft von 25 N gerade in Bewegung gesetzt. Wie groß ist der Haftreibungskoeffizient und die Haftreibungskraft? Welche Kraft ist nötig, um ihn mit einer konstanten Geschwindigkeit zu bewegen, wenn der Gleitreibungskoeffizient 0,35 beträgt?

112. Auf einen Stab wirkt eine Zugkraft von 1,8 kN. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_0 = 0,19$. Mit welcher Mindestkraft F_N muss die Schraube auf den Stab drücken, wenn er nur durch Reibung in seiner Lage gehalten werden soll?



6.4. Kraft, Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad

Arbeit W ist das Produkt von Kraft F und Kraftweg s:

$$W = F \cdot s \qquad [N \cdot m = J]$$

Leistung P ist das Verhältnis von Arbeit W zu Zeit t:

$$P = \frac{W}{T} \qquad [W]$$

Diese Definitionen lassen sich auf viele spezielle Fälle von Arbeit und Leistung anwenden, z.B. auf Hubarbeit und -leistung:

$$W_{Hub} = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h \qquad P_{Hub} = \frac{W_{Hub}}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$$

Man muss bei jedem Fall schauen, welche Kraft aufgewendet werden muss und über welchen Weg. Einfache Maschinen (z.B.: schiefe Ebene, Flaschenzug, Schraube, Keil) verringern die Kraft, die für einen Prozess aufgewendet werden muss, indem sie den Kraftweg künstlich verlängern. Die Arbeit bleibt dabei gleich.
Technische Prozesse haben einen Wirkungsgrad η, das ist das Verhältnis der zugeführten Arbeit bzw. Leistung zur abgegebenen Arbeit bzw. Leistung:

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

Übungsaufgaben:

113. Wie viel Arbeit muss man verrichten, um ein Auto ($m = 1,5\,\mathrm{t}$) mit einer Hebebühne in 2 m Höhe zu heben? Welche Leistung wurde dabei geleistet, wenn der Vorgang eine halbe Minute gedauert hat?

114. Wie viel mechanische Arbeit wird beim Schieben einer Schubkarre geleistet, wenn diese in einer Minute 100 m weit bei einem Reibungskoeffizienten von 0,22 geschoben wird? Welcher Leistung entspricht das?

115. Wie lang muss eine schiefe Ebene sein und welchen Steigungswinkel muss sie haben, wenn man mit einer Kraft von 380 N einen Körper der Masse 50 kg um 2 m nach oben befördern will (ohne Reibung)?

116. Ein Motorblock der Masse $0,285\,\mathrm{t}$ soll um $1,80\,\mathrm{m}$ angehoben werden. Der Mechaniker verwendet dazu einen Flaschenzug mit 8 Rollen. Der Hubvorgang dauert 25 s und der Mechaniker muss dabei mit einer Kraft von 400 N ziehen.

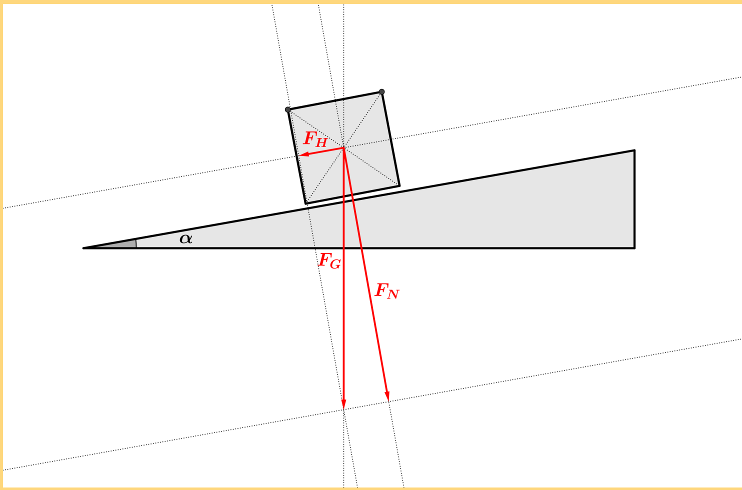
a) Berechne die Arbeit und die Leistung des Mechanikers.

b) Berechne die Änderung der potentiellen Energie des Motorblocks beim Heben (= die Hubarbeit).

c) Wie groß ist der Wirkungsgrad des Flaschenzuges?

6.5. Schiefe Ebene

An der schiefen Ebene wird die Gewichtskraft F_G des Gegenstandes in zwei Teilkräfte zerlegt, zum einen in eine Kraft senkrecht zur schiefen Ebene, die Normalkraft F_N, zum anderen in eine Kraft parallel zur schiefen Ebene, die Hangabtriebskraft F_H. Folgendes Bild veranschaulicht den Zusammenhang der Kräfte an der schiefen Ebene:



Normal- und Hangabtriebskraft kann man mit Hilfe der Winkelfunktionen aus der Gewichtskraft berechnen.

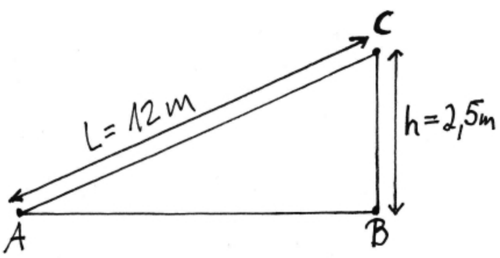
$$F_H = F_G \cdot \sin\alpha$$

$$F_N = F_G \cdot \cos\alpha$$

Achtung: Die Reibungskraft an der schiefen Ebene hängt von der wie oben berechneten Normalkraft ab, die hier nur ein Teil der Gewichtskraft ist. Bei Bewegungen in der Waagrechten entspricht die Normalkraft der Gewichtskraft.

Übungsaufgaben:

117. Ein Fass mit einer Gewichtskraft von 2800 N wird einmal von A nach C die schiefe Ebene hinauf gerollt. Anschließend wird das gleiche Fass mit dem Kran von B nach C auf direktem Weg hochgehoben.
    a) Welche Arbeit wird beim Heben des Fasses von B nach C aufgewendet?
    b) Wie groß ist die zum Rollen von A nach C erforderliche Kraft (ohne Reibung)?



118. Ein Transportkübel der Masse 1 t wird unter 30° auf einer schiefen Ebene nach oben gezogen:

   a) auf einer Gleitbahn.

      i. Fertige eine maßstabsgetreue Zeichnung ($1000\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{cm}$) des Parallelogramms aus Gewichts-, Normal- und Hangabtriebskraft an und bestimme die unbekannten Kräfte aus der Zeichnung!

      ii. Berechne die Kraft des Kübels auf die Fahrbahn und die Hangabtriebskraft!

      iii. Wie groß muss die Zugkraft F ohne Berücksichtigung der Reibung mindestens sein?

      iv. Welche Kraft ist mit Berücksichtigung der Reibung zum Hochziehen erforderlich, wenn $\mu = 0,3$ ist?

   b) auf Rädern: $\mu_R = 0,01$. Wie groß muss F jetzt mindestens sein?

7. Kinetik/Kinematik

7.1. Gleichförmige Bewegungen

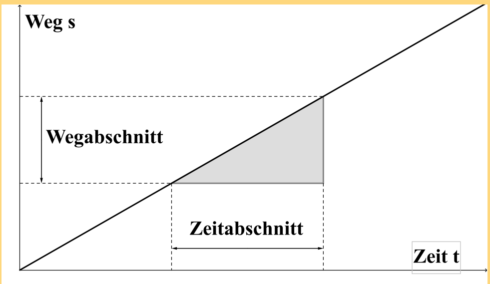
Eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit nennt man auch gleichförmige Bewegung. Eine konstante Geschwindigkeit bedeutet, dass in jedem Zeitabschnitt Δt die gleiche Wegstrecke Δs zurückgelegt wird. Das Verhältnis von Wegstrecke pro Zeiteinheit heißt Geschwindigkeit v:

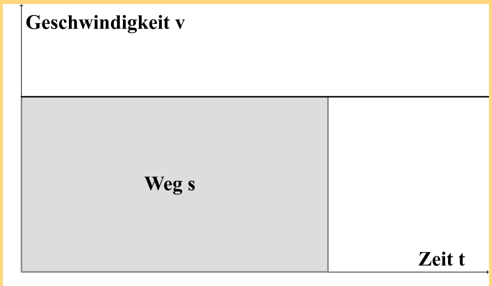
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \left[\frac{m}{s} = 3,6\,\frac{km}{h}\right]$$

Stellt man diese Formel nach dem Weg um, erhält man das sog. Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung:

$$s = v \cdot t$$

Grafisch lässt sich die gleichförmige Bewegung in einem Weg-Zeit- und einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm darstellen:





Bewegungen im Alltag oder in der Technik sind selten wirklich gleichförmig. Selbst Bewegungen, die keine konstante Geschwindigkeit haben, kann man aber im Ganzen als gleichförmige Bewegungen betrachten. Die Geschwindigkeit, die man dann bestimmt, ist eine Durchschnittsgeschwindigkeit. In vielen Fällen kann man mit dieser dann die benötigte Zeit oder den zurückgelegten Weg bei einem Vorgang berechnen.

Übungsaufgaben:

119. Ein Fahrradfahrer fährt 80 km in 6:30 h. Welche durchschnittliche Geschwindigkeit hatte er (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$)?

120. Wie lange braucht ein Autofahrer für die Strecke Hamburg - München (776 km), wenn er durchschnittlich 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt?

121. Zwei Läufer starten zur gleichen Zeit. Läufer 1 hat 50 m Vorsprung vor Läufer 2 und läuft mit einer Geschwindigkeit von $9,9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Läufer 2 läuft durchschnittlich mit $10,8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wann holt er den ersten Läufer ein und wie weit sind die beiden Läufer dann jeweils gelaufen?

7.2. Gleichmäßig beschleunigte Bewegungen

Bei Bewegungen mit gleichmäßiger Beschleunigung ändert sich die Geschwindigkeit in jedem Zeitabschnitt Δt um den gleichen Betrag Δv. Das Verhältnis von Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit heißt Beschleunigung a:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

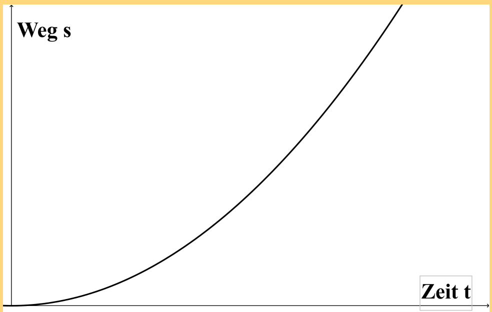
Stellt man diese Formel nach der Geschwindigkeit um, erhält man das sog. Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung:

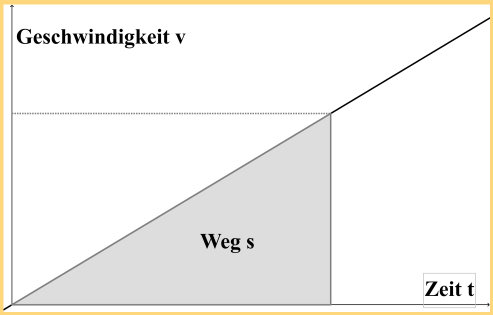
$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

Das Weg-Zeit-Gesetz für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen lässt sich in zwei Formen schreiben:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta v \cdot t$$

Grafisch lässt sich die gleichförmige Bewegung in einem Weg-Zeit- und einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm darstellen:





Übungsaufgaben:

122. Ein Auto beschleunigt von 0 auf 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in 10 s. Welcher Beschleunigung in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ entspricht das?

123. Ein Mann fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf der Autobahn. In 200 m kommt ein Stau in Sicht. Er braucht eine Sekunde um zu reagieren und bremst dann mit $a = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

    a) Wie lange bräuchte er, um zum Stillstand zu kommen, wenn der Stau nicht da wäre?

    b) Welchen Weg würde er zwischenzeitlich zurücklegen?

    c) Kommt er noch vor dem Stauende zum Halten? Wenn nicht, mit welcher Geschwindigkeit fährt er auf das Stauende auf?

124. Eine Drehscheibe mit Bühnenaufbau (Durchmesser 11,50 m) soll sich in einer kurzen Pause um eine halbe Drehung bewegen. Sie wird aus der Ruhe mit $a = 0,25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beschleunigt auf $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, läuft dann ein kleines Stück mit dieser Geschwindigkeit und soll rechtzeitig mit $a = -0,25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ wieder gebremst werden. Wie lange braucht die Drehscheibe für diese halbe Drehung und nach welcher Zeit muss gebremst werden? (Hinweis: Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gelten hier für den äußersten Rand der Drehscheibe.)

7.3. Spezialfall: Der freie Fall

Der freie Fall ist ebenfalls eine Bewegung mit gleichmäßiger Beschleunigung, der Fallbeschleunigung $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (mittlerer Wert auf der Erde). Es gelten die gleichen Gesetze wie für die gleichmäßig beschleunigten Bewegungen, nur dass die Beschleunigung a durch die Fallbeschleunigung g und der Weg s durch die Fallhöhe h ersetzt wird.
Das Weg-Zeit-Gesetz für den freien Fall kann man dann folgendermaßen schreiben:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Beim freien Fall interessiert man sich oft für die Fallzeit und die Aufprallgeschwindigkeit des Gegenstandes:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

$$v = g \cdot t = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Anmerkung: Der Luftwiderstand bleibt bei obigen Gleichungen unberücksichtigt, da die Berechnungen andernfalls erheblich komplizierter ausfallen würden. Der Luftwiderstand hängt von vier Größen ab: der Dichte der Luft, der Querschnittsfläche, die der Körper der Luft entgegenstellt, der Form des Gegenstandes und der Geschwindigkeit. So lange der fallende Gegenstand einigermaßen aerodynamisch ist und der freie Fall nur eine kurze Dauer hat, ist der Luftwiderstand nicht besonders groß und kann vernachlässigt werden. In den anderen Fällen hängen die berechneten Größen in sehr großem Maße vom Luftwiderstand ab, und zwar so sehr, dass es z.B. bei einem Fallschirm-Sprung je nach Körperhaltung bei einer maximalen Geschwindigkeit von $300\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ zu keiner Geschwindigkeitszunahme mehr kommt. Die beschleunigende Wirkung der Gravitation und der Luftwiderstand heben sich dann genau auf.

Übungsaufgabe:

125. Der Burj Khalifa in Dubai ist der zur Zeit höchste Wolkenkratzer der Welt, der eine Höhe von $828\,\mathrm{m}$ erreicht. Angenommen jemand klettert auf diese Höhe, um von dort herunter zu springen.
    a) Wie lange hat er während des freien Falls Zeit für sein Abschieds-Telefonat?
    b) Welche Geschwindigkeit hat er beim Aufprall erreicht?

7.4. Kraft, Trägheit und Beschleunigung

Wie in 5.1 schon angesprochen, verharrt ein Körper in seinem Bewegungszustand, ändert freiwillig weder Geschwindigkeit noch Richtung. Er ist träge. Will man ihn in Bewegung setzen oder seine Geschwindigkeit ändern, so muss eine Beschleunigungskraft auf den Körper wirken, die die Trägheit (=Trägheitskraft) überwindet. Diese Kraft berechnet sich nach der Grundgleichung der Mechanik:

$$F = m \cdot a$$

Die Trägheitskraft tritt immer entgegen der Beschleunigungsrichtung auf, da sie sich der Beschleunigung widersetzt. Mit diesem Wissen kann man nun alle Kräfte bei Bewegungen in der Waagrechten, an der schiefen Ebene und in vertikaler Richtung bestimmen. Demonstrieren tun dies die drei folgenden Aufgaben.

Übungsaufgaben:

126. Ein Auto der Masse $m = 1{,}2\,\mathrm{t}$ soll aus der Ruhe in $t = 5\,\mathrm{s}$ auf eine Geschwindigkeit von $v = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ beschleunigt werden.
    a) Welche Beschleunigung a erfährt es dabei?
    b) Welche Kraft F ist hierfür notwendig?
    c) Welchen Weg s legt es dabei zurück?
    d) Wie groß ist die Trägheitskraft auf den Fahrer des Autos, wenn er mit der Geschwindigkeit von $v = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf ein Hindernis auffährt und das Auto dabei innerhalb von $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$ zum Stillstand kommt?

127. Eine Dekoration der Masse $m = 450\,\mathrm{kg}$ wird durch einen Zug von oben nach unten befördert. Die Geschwindigkeit des Zugs beträgt $v = 0,7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und wird innerhalb einer Sekunde gestoppt.
    a) Welchen Weg s legt die Dekoration während dieses Bremsvorgangs zurück?
    b) Welche Zugkraft wirkt während des Abbremsens auf das Seil des Zugs?
    c) Wie klein darf die Bremszeit des Zugs höchstens sein, damit die Zusatzlast durch die Bremsung 1,5 kN nicht übersteigt?
    d) Wie groß ist die Zugkraft auf das Seil beim gleichen Abbremsvorgang wie in Aufgabenteil b, wenn der Zug in der Aufwärtsbewegung ist?

128. Eine 50 kg schwere Kiste steht auf einer schiefen Ebene mit dem Steigungswinkel 20°.
    a) Rutscht die Kiste die schiefe Ebene von alleine hinunter, wenn der Haftreibungskoeffizient 0,3 beträgt?
    b) Falls ja, wie groß ist die Beschleunigung der Kiste den Hang hinunter, wenn die Kiste mit einem Gleitreibungskoeffizienten von 0,2 gleitet?
    c) Wie schnell ist die Kiste dann nach 50 m Strecke?
    d) Welche Kraft ist erforderlich, wenn man die Kiste mit einer Beschleunigung von $a = 0,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die schiefe Ebene hinauf ziehen möchte?